

Il calcolo nella scuola primaria

Scritto da Laurent Lafforgue

(con l'aiuto di maestri tirocinanti e di professori di diverse discipline¹)

1) Obiettivi e limiti dell'apprendimento del calcolo nella scuola primaria

L'obiettivo è di far acquisire agli alunni la conoscenza dei numeri interi naturali (0, 1, 2, 3, ...), della loro scrittura in forma decimale e delle loro relazioni elementari (l'ordine e le quattro operazioni), sia astrattamente che nei loro usi concreti legato al contare e alla misura: lunghezze, superficie, volumi, masse, tempi, angoli. Al termine del percorso della scuola primaria, gli alunni devono padroneggiare con facilità, precisione e sicurezza le operazioni elementari sui numeri e sulle grandezze, e la manipolazione delle unità di misura; devono anche essere in grado di redigere in modo sintetico e rigoroso la soluzione di problemi di calcolo formulati nella lingua corrente, ispirati dalla vita pratica, dalle scienze naturali o alla meccanica, e che necessitino di un ragionamento di natura discorsiva.

Queste conoscenze – che per la maggior parte sono utili di per sé – hanno un grande valore dal punto di vista matematico e un potere formativo considerevole.

Consentono di costruire una relazione d'intimità con i numeri, secondo l'espressione di René Thom, e addestrano al loro uso concreto. Non soltanto contribuiscono a strutturare la mente nel percorso del suo sviluppo ma costituiscono anche la base indispensabile per un apprendimento più avanzato della matematica e delle scienze naturali, nella scuola secondaria di primo grado e anche oltre. Esistono in matematica molti tipi di numeri, di addizioni e di moltiplicazioni, e in fisica molti tipi di misure. Tutti affondano le loro radici e si sviluppano sul terreno della conoscenza dei numeri naturali e delle loro operazioni elementari, la quale deve diventare una seconda natura.

Nella scuola elementare la disciplina del calcolo si basa sull'uso delle quattro operazioni sui numeri interi. Essa si estende alla conoscenza e al calcolo dei numeri decimali e delle frazioni, limitandosi ai numeri positivi che possono rappresentare misure reali di lunghezze, di masse, ecc... Il calcolo approssimato è più sottile del calcolo esatto, di cui richiede la padronanza preliminare: il calcolo degli intervalli di errore non trova spazio nella scuola primaria. Tuttavia vi si insegna – in particolare per la risoluzione dei problemi – la stima mentale degli ordini di grandezza mediante arrotondamento e la

¹ Mi preme ringraziare i membri del GRIP (*Group de Réflexion Interdisciplinaire sur les Programmes*) per i loro commenti e suggerimenti nella redazione di questo testo. Esprimo profonda riconoscenza nei confronti di Madame Catherine Krafft, professore di fisica presso l'Università d'Orsay, che l'ha corretto, così come molti altri testi che ho sottoposto alla sua attenzione, con un rigore e un'attenzione alla forma e al contenuto senza pari. Inoltre sono particolarmente felice dell'approvazione senza riserve di Madame Liliale Lurçat della sua versione finale. L'originale francese di questo testo, datato gennaio 2007, è reperibile nel sito di Laurent Lafforgue all'indirizzo <http://www.ihes.fr/~lafforgue/textes/CalculEcolePrimaireLL.pdf>. La traduzione italiana è di Claudia Umani, rivista da Giorgio Israel.

nozione di valore approssimato di un quoziente al decimo o al centesimo dell'unità scelta.

Il calcolo viene eseguito su numeri, non su incognite astratte. Le verifiche si riferiscono a esempi e figure, nell'ambito di ragionamenti sufficienti a convincere anche se non possono essere considerati come dimostrazioni formali. Al termine del percorso della scuola primaria il maestro può eventualmente spingersi oltre sulla via dell'astrazione, limitatamente a quegli alunni che ritiene già sufficientemente maturi e sicuri delle proprie conoscenze.

2) Principi generali per l'apprendimento del calcolo nella scuola primaria²

L'intimità con i numeri si costruisce:

- mediante l'acquisizione di automatismi (tra i quali figura al primo posto una perfetta conoscenza delle tavole dell'addizione e della moltiplicazione, oltre alla pratica degli algoritmi di calcolo scritto e mentale delle quattro operazioni),
- mediante la diversificazione delle situazioni (in particolare, la manipolazione dei numeri e le operazioni su di essi, sia in diversi contesti concreti dove intervengono grandezze fisiche, che in astratto),
- mediante una molteplicità di esempi di applicazioni (come la conoscenza di un buon numero di formule di superfici e di volumi), dei quali vengono messe in evidenza analogie e differenze,
- mediante la diversificazione degli approcci (per esempio, il calcolo mentale e il calcolo in colonna come due modalità di calcolo),
- mediante la creazione di una rete di collegamenti (per esempio, la corrispondenza tra la scrittura decimale e i sistemi di multipli e sotto multipli delle unità di misura usuali, oppure l'equivalenza tra le due scritture di un numero decimale, quella con la virgola e quella come frazione con denominatore una potenza di 10).

La parola d'ordine maestra nell'apprendere il calcolo – come in ogni tipo di apprendimento – è la gradualità: si procede dal più semplice al più complesso, in particolare dai numeri piccoli ai numeri grandi, e dalle figure geometriche più elementari a quelle più complesse, senza bruciare alcuna tappa. I concetti nuovi devono essere introdotti uno dopo l'altro, poggiando sulle conoscenze precedentemente acquisite e sull'intuizione. Allo stesso modo, le nuove connessioni tra concetti già noti devono

² Mettere in pratica efficacemente questi principi richiede lezioni regolari e tempo a disposizione: è necessario ripristinare le ore di matematica, come anche quelle di francese e di tutte quelle materie che andrebbero insegnate seriamente, che erano a disposizione nella scuola primaria fino al 1969. Le attività (uscite frequenti, "animazioni pedagogiche" di vario genere, visite di soggetti esterni, stages e riunioni continue imposte ai maestri) che riducono gli orari di queste discipline devono essere bandite. Il principio della suddivisione dell'anno scolastico in quattro parti scandite da periodi di vacanza di due settimane ciascuno deve essere rimesso in discussione.

Inoltre la formazione dei futuri maestri deve essere totalmente rivista. Le cosiddette "scienze dell'educazione" che dominano gli IUFM (*Instituts Universitaires de Formation des Maîtres*) non consentono di dare ai futuri maestri conoscenze matematiche (e di altro genere) sufficienti né li formano a insegnare in modo rigoroso, strutturato e progressivo.

essere messe in evidenza una alla volta. In altri termini, gli alunni devono sempre sapere esattamente di cosa sta parlando il maestro. L'introduzione di una nuova nozione o di un nuovo collegamento rappresenta l'occasione per fare dei richiami. Non bisogna mancare di procedere a tutti i richiami che s'impongono in modo naturale nel contesto considerato.

Ogni nuova nozione o operazione sarà indicata da uno o più termini matematici precisi (per esempio per la moltiplicazione, le nozioni di moltiplicando, moltiplicatore e prodotto, o per la divisione, quelle di dividendo, divisore, quoziente e resto) da introdurre immediatamente; gli alunni devono impararli.

Lo sviluppo della matematica è in parte basato sul bisogno di sistematizzazione della mente umana: un insieme di conoscenze che sviluppa fino in fondo la logica soggiacente è più soddisfacente per la mente, e più facile da capire e da assimilare. Il rispetto di questo principio in una disciplina come il calcolo elementare facilita l'apprendimento e rafforza l'esigenza logica dei bambini. Questa è la ragione per cui gli alunni, al termine del percorso della scuola primaria, devono conoscere gli algoritmi generali delle quattro operazioni sui numeri, senza limitazione sul numero delle cifre. E questo è anche il motivo per cui s'insegnano le frazioni, che consentono di dividere un numero qualsiasi per un altro.

Ogni volta che la mente può trarne un maggiore senso di completezza, si metteranno in evidenza coppie di nozioni: per esempio, l'addizione e la sottrazione viste come operazioni inverse, e allo stesso modo la moltiplicazione e la divisione.

3) Numerazione, confronto tra numeri e apprendimento delle quattro operazioni

L'apprendimento della numerazione e lo studio delle quattro operazioni devono avvenire contemporaneamente; si comincia già verso la fine della scuola dell'infanzia oppure all'inizio della scuola primaria, limitandosi in un primo momento a numeri molto piccoli.

Il passaggio a numeri sempre più grandi deve essere molto graduale. Le tappe più importanti sono l'introduzione delle decine e della scrittura decimale, poi delle centinaia, delle migliaia, dei milioni, ecc...

Già nelle fasi iniziali dell'apprendimento, i numeri e le operazioni devono fare riferimento a differenti tipi di oggetti familiari al bambino, ripetendo senza sosta che l'addizione e la sottrazione sono lecite solo fra oggetti della stessa natura. Il collegamento con i numeri astratti deve essere fatto moltiplicando esempi concreti formalmente identici.

L'addizione viene introdotta in un primo momento come aggiunta (operazione che accresce il numero), la sottrazione come eliminazione (che lo fa diminuire), la moltiplicazione come aggiunta ripetuta di gruppi identici e la divisione come suddivisione in gruppi uguali.

4) Calcolo mentale e calcolo in colonna

Il calcolo mentale e il calcolo in colonna devono essere introdotti e praticati molto presto, dapprima su numeri piccoli. Nella misura in cui ciò non nuoce alla buona abitudine di preferire il calcolo mentale al calcolo in colonna ogni volta che ciò è possibile, è bene abituare gli alunni a scrivere le quattro operazioni anche se conoscono soltanto i numeri a una cifra.

Sin dalla scuola elementare, l'apprendimento del calcolo mentale e del calcolo in colonna necessita la conoscenza a memoria delle tavole complete di addizione e moltiplicazione, fino al punto in cui funzionano altrettanto bene come tavole di sottrazione e divisione, anche quando la divisione non è esatta. Necessita anche di numerosi e regolari esercizi per il consolidamento e il mantenimento degli automatismi. Quando si ha a che fare con operazioni in cui compare almeno un numero a due cifre, è buona norma verificare in un certo numero di casi che il calcolo mentale e quello in colonna (che non seguono lo stesso procedimento) portino allo stesso risultato.

La padronanza degli algoritmi delle quattro operazioni in colonna è un obiettivo di primaria importanza.

Il più ricco è quello della divisione (Quale? Ci si domanderà, dato che ne esistono diversi. È ragionevole mantenere quello che è stato più a lungo e con profitto insegnato nelle scuole primarie). Applicarlo con successo ha come presupposto la perfetta conoscenza delle tavole e delle altre operazioni, del calcolo mentale e di una particolare forma di calcolo approssimato (per trovare ogni nuova cifra del quoziente). Quando una classe ha assimilato l'algoritmo della divisione, sarà sufficiente assegnare una o due divisioni in colonna più volte a settimana per mantenere la pratica delle quattro operazioni a un buon livello.

È necessario conoscere la divisione con resto e quella con sviluppo decimale dopo la virgola.

Si chiede spesso di “fare la verifica di una divisione” moltiplicando il divisore per il quoziente e aggiungendo il resto. Si tratta di una verifica pratica del senso della divisione ma anche della correttezza dell'algoritmo: è bene che gli alunni verifichino quanto più possibile la coerenza dei risultati ottenuti e dei metodi impiegati.

Si abitueranno gli alunni a verificare che l'ordine di grandezza del risultato di una moltiplicazione o di una divisione è corretto (mediante calcolo mentale su cifre tonde, ossia numeri con una sola cifra seguiti da zeri, che approssimano i dati di partenza).

Si insegnerà anche la “prova del 9” come ulteriore metodo per la verifica parziale del risultato di una operazione.

5) Calcolo e misure

Si insegnerà la misura delle lunghezze e delle masse contemporaneamente all'introduzione delle unità di misura delle grandezze fisiche, dei loro multipli e sotto

multipli. Il principio di sistematicità impone di insegnare anche quei multipli e sotto multipli (come il decametro) che non fanno più parte del linguaggio corrente.

L'apprendimento dei multipli delle unità di misura è l'occasione per introdurre o consolidare la conoscenza della scrittura decimale, e di completare quella dei sottomultipli mediante l'introduzione delle cifre dopo la virgola. Si estende dunque ai numeri decimali con la virgola la pratica delle quattro operazioni e del confronto tra numeri.

Partendo da misure concrete e limitandosi a questo o quel sottomultiplo o, che è lo stesso, a questa o quella cifra dopo la virgola, si introduce la nozione di valore approssimato.

Si insegnerà e si verificherà concretamente con gli alunni che le lunghezze e le masse si sommano. Si insisterà sul fatto che, al contrario, non si possono sommare grandezze di diversa natura e che si possono effettuare operazioni numeriche solo se le grandezze in questione sono espresse nelle stesse unità di misura.

Si introdurrà anche il sistema più complesso delle unità di misura di tempo (secondi, minuti, ore, giorni, mesi, anni) e si faranno esercitare gli alunni a sommare e sottrarre intervalli di tempo, e a moltiplicare o dividere una durata per un numero.

6) Calcolo e geometria

Si dirà che la superficie di una figura piana è uguale al numero di quadretti, di lato un'unità, necessari per ricoprirla completamente, potendo anche ritagliare la figura. Si verificherà con gli alunni che la superficie di un rettangolo i cui lati abbiano misure espresse da numeri interi è il prodotto della sua lunghezza e della sua larghezza. Ritagliando in casi particolari, si verificheranno le formule per il calcolo della superficie dei triangoli, dei parallelogrammi, delle losanghe e dei trapezi. Si spiegherà che la regola del ritaglio significa che le superficie si sommano.

Si introdurrà la formula per il calcolo della superficie di un cerchio, e si proporrà un valore approssimato del numero π . Si insegnerà a misurare gli angoli (in gradi) e a calcolare mediante formule la circonferenza di un cerchio e la lunghezza di un arco di circonferenza. Si confronteranno i risultati ottenuti mediante il calcolo con le misure prese su figure (per mezzo di un filo). Si verificherà che le misure di angoli e di archi di circonferenze si sommano. Si definirà il perimetro delle figure piane studiate e si spiegherà come calcolarlo.

Si insisterà sulla regola generale che una formula di calcolo di una superficie contiene sempre il prodotto di due lunghezze. Si spiegherà che moltiplicare tutte le lunghezze per uno stesso numero ha come effetto quello di moltiplicare le superficie per il quadrato di quel numero. Questa sarà l'occasione per introdurre la nozione di quadrato di un numero.

Si insegneranno le unità di misura delle superfici dedotte da quelle delle lunghezze.

Diremo che il volume di un solido è uguale al numero di cubi, di lato un'unità, necessari per riempirlo, potendo anche fare dei ritagli. Si verificherà con gli alunni che il volume di un parallelepipedo retto è il prodotto delle tre lunghezze nelle tre direzioni

dello spazio. Si insegneranno le formule per il calcolo del volume dei parallelepipedi rettangoli, delle piramidi, dei cilindri, dei coni e delle sfere.

Si spiegheranno le formule che permettono di calcolare il volume e la superficie di una sfera. Si definirà la superficie totale degli altri solidi studiati, e si spiegherà come calcolarla.

Si spiegherà che i volumi si sommano e si insisterà sulla regola generale che la formula che consente il calcolo di un volume contiene sempre il prodotto di tre lunghezze o, che è lo stesso, il prodotto di una superficie per una lunghezza. Si spiegherà che moltiplicare le lunghezze per uno stesso numero equivale a moltiplicare il volume per il cubo di quel numero. Questa sarà l'occasione per insegnare le potenze cubiche di un numero.

Si insegneranno le unità di volume derivate dalle unità di lunghezza.

Si definirà il litro come il volume di un cubo di lato un decimetro. Il volume equivale allora alla capacità: può essere valutata misurando la quantità di liquido necessaria per riempirlo, se è un oggetto cavo, o quella che lo sposta, se si tratta di un oggetto pieno che viene immerso in un fluido.

Si insegnerà che il chilogrammo è la massa di un litro d'acqua.

Bisogna pretendere dai ragazzi che, quando parlano di grandezze fisiche, non dimentichino mai di indicare le unità di misura.

7) Quali oggetti e strumenti in classe?

Nella società contemporanea, la maggior parte degli alunni trascorre diverse ore al giorno davanti a diversi schermi che sollecitano violentemente ed esclusivamente la vista e l'udito; le mani restano inattive oppure agiscono esclusivamente attraverso l'intermediazione di una console o di una tastiera. Ciò rende difficile per i bambini l'acquisizione del senso della realtà e tende a rinchiuderli in un mondo virtuale e semplicistico.

La scuola deve correggere queste influenze. Per questo motivo, né il computer, del quale gli alunni non sarebbero in grado di imparare la programmazione alla loro età, né altri tipi di schermi devono avere spazio nella scuola primaria.

Le calcolatrici devono essere escluse come strumenti per apprendere il calcolo. L'esperienza mostra che, quando gli alunni sono autorizzati a portarle in classe, la maggior parte di essi abusa del loro uso troppo facile e quasi magico, cosa che costituisce una grave ipoteca sul loro apprendimento del calcolo, per esempio quello delle tavole dell'addizione e della moltiplicazione. È dunque preferibile vietare l'uso della calcolatrice prima dell'età alla quale in passato imparavano ad utilizzare il regolo calcolatore.

Al contrario, bisognerà cogliere ogni possibile occasione affinché i bambini manipolino oggetti concreti e familiari legati all'apprendimento dei numeri e delle loro operazioni.

Per imparare a contare e per le operazioni su numeri piccoli, è necessario che i bambini continuo e raggruppino o suddividano in piccoli gruppi oggetti, maneggiandoli. Il

pallottoliera è uno strumento pedagogico molto efficace, che può essere utilizzato anche con i numeri grandi; è auspicabile che i bambini apprendano a servirsene.

È indispensabile che l'apprendimento delle misure, delle loro proprietà e delle loro mutue relazioni sia sempre accompagnato da numerose manipolazioni concrete su oggetti. Occorrerà aver cura che gli alunni abbiano a disposizione doppi e tripli decimetri, metri a nastro e metri rigidi, decimetri da geometra, bilance e cassette dei pesi, figure piane in legno o in plastica, squadre, compassi, goniometri, carta a quadretti e forbici per disegnare e ritagliare le figure di cui si sta cercando di calcolare la superficie, solidi di tutte le forme studiate che consentano di verificare, per immersione in acqua, le formule per il calcolo dei volumi, corpi solidi di diversa densità.

8) I numeri e l'economia domestica

Un altro uso concreto dei numeri e del calcolo interessa direttamente i bambini e acquisterà rilevanza con l'età: è la contabilità dei prezzi e del denaro.

Calcolare il prezzo di panieri di prodotti diversi costituisce l'occasione di fare addizioni e moltiplicazioni non appena si ragiona sulle quantità.

Il sistema delle monete, con cui i bambini acquistano familiarità molto presto, consentono di introdurre già dalla scuola primaria il sistema decimale fino a due cifre dopo la virgola.

Le nozioni di prezzo di acquisto, di spesa, di prezzo di costo, di prezzo di ricavo, di sconto, di profitto, di tassa, e, più in là, di interesse semplice, forniscono l'occasione non soltanto per sommare e sottrarre numeri ma anche per introdurre la nozione di percentuale. Si spiega il senso letterale dell'espressione "per cento" sottolineando il fatto che indica cento unità, facendo apparire la percentuale come un primo esempio di frazione con denominatore 100.

Si faranno esercitare gli alunni a trasformare un tasso espresso sotto forma di percentuale in una somma monetaria come parte di una somma complessiva, e viceversa. Si tratta di una prima famiglia di esempi di proporzionalità.

9) Proporzionalità

È necessario conoscere la regola del tre a memoria. La sua applicazione, che non si riduce ad un puro automatismo, implica un ragionamento di una certa complessità che presuppone la comprensione del funzionamento e del significato della nozione di proporzionalità. È necessario esercitare al suo utilizzo in diverse situazioni concrete, di cui diamo qui alcuni esempi importanti:

- esempi tratti dalla vita quotidiana (calcolo dei materiali necessari per effettuare dei lavori, degli ingredienti di una ricetta di cucina, ecc...),
- conversioni di misure quando si cambiano le unità,
- cambiamenti di scala per la rappresentazione di distanze su una carta geografica o stradale,

- la proporzionalità di massa e volume di un corpo di data composizione (insieme alle nozioni di peso specifico e densità),
- la proporzionalità, a velocità costante, tra la distanza percorsa e il tempo impiegato a percorrerla,
- la proporzionalità del volume di acqua versata e del tempo, in un rubinetto o un fiume a portata costante,
- la suddivisione in parti uguali di diversi tipi di oggetti.

10) Aritmetica

La suddivisione in parti uguali e i diversi esempi di proporzionalità incontrati ed esaminati costituiscono l'occasione per introdurre le frazioni, quozienti di due numeri interi chiamati numeratore e denominatore.

Si farà notare attraverso una serie di esempi quali sono le condizioni di uguaglianza di due frazioni: il valore di una frazione non cambia se si moltiplicano o dividono numeratore e denominatore per uno stesso numero intero. Ne deriva in modo naturale la nozione di divisibilità di un intero per un altro, poi quella di "M.C.D." che consente di ridurre una frazione alla sua forma più semplice.

Si procederà all'introduzione del concetto di numero primo e si faranno esercitare gli alunni a riconoscere se un numero piccolo è primo oppure no.

Si insegnerà a moltiplicare e dividere frazioni, poi a sommarle e sottrarle, riducendole allo stesso denominatore. Si introdurrà così il concetto di multiplo poi, per economia di pensiero, quello di "m.c.m".

Si assegneranno molti esercizi per utilizzare queste pratiche e comprendere approfonditamente queste nozioni. Per quanto riguarda le frazioni nella scuola primaria, è preferibile limitarsi a numeri piccoli, anche se deve essere chiaro che non esiste limite per il numeratore e il denominatore di una frazione.

Si faranno esercitare gli alunni a trasformare una frazione in un numero decimale, mostrando loro la periodicità dello sviluppo ottenuto, spiegato mediante la ripetizione di una medesima situazione nel processo di divisione.

11) La redazione come parte essenziale della soluzione dei problemi

Sin dalle prime fasi dell'apprendimento del calcolo, bisogna pretendere che gli alunni abbiano la massima cura nella scrittura delle operazioni sulla carta.

Allo stesso modo, non appena è possibile formulare una domanda che richieda un calcolo all'interno di una frase semplice che si riferisca a situazioni e oggetti concreti, ossia molto presto, bisogna esigere la presentazione del risultato e del calcolo mediante una frase redatta correttamente.

La complessità delle domande deve aumentare progressivamente, fino a richiedere agli alunni un ragionamento relativamente elaborato e strutturato e quindi la formulazione di più frasi concatenate di presentazione e di narrazione.

Lo scopo dell'insegnamento del calcolo nella scuola primaria è quello di imparare a risolvere problemi semplici, ispirati alla vita pratica, alle scienze naturali o alla meccanica, formulati nella lingua corrente, costituiti da una sola domanda e che facciano uso di misure di grandezze fisiche note, di conversioni di unità di misura, di conversioni di scala e del concetto di proporzionalità. Al termine della scuola primaria, l'alunno deve essere in grado di trovare da solo le tappe del ragionamento necessario per risolvere un problema semplice e di saperle esporre.

Bisogna dare grande importanza alla redazione delle soluzioni che consente la completa padronanza del problema che si sta trattando. Bisogna esigere dall'alunno la redazione del testo in modo che riesca a comprenderlo lui stesso e come se si stesse rivolgendo a qualcuno che non conosce la soluzione e al quale deve spiegarla. Le frasi devono essere corrette dal punto di vista linguistico, e fare uso del vocabolario preciso della vita pratica, della matematica e della meccanica elementare, delle grandezze fisiche, delle loro misure e delle loro unità. Non devono dimenticare alcun argomento ed essere ben concatenate dal punto di vista logico.

Il collegamento tra il calcolo, il ragionamento e la lingua scritta è fondamentale, sia dal punto di vista di un apprendimento più avanzato della matematica e delle scienze naturali, sia per la formazione e la strutturazione generale della mente.